



MINISTERUL  
EDUCAȚIEI



**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Locală, Județul Dolj, 17 februarie 2024**  
**CLASA a IX-a**

**Subiectul 1.** a) Demonstrați că pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  are loc egalitatea

$$[x] + \left[ x + \frac{1}{2} \right] = [2x]$$

unde  $[x]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $x$ .

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\left[ \frac{2x+1}{3} \right] + \left[ \frac{4x+5}{6} \right] = \frac{x+3}{2}$ .

(\*\*\*)

**Subiectul 2.** Demonstrați că 13 divide numărul  $67^{67} + 83^{83} - 7^7$ .

*Supliment Gazeta Matematică Nr.10/2023*

**Subiectul 3.** Fie  $A, B, C$  trei puncte necoliniare și punctele  $M, N, P, T$  astfel încât  $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ ,  
 $2\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NC}$ ,  $4\overrightarrow{BP} = 9\overrightarrow{CP}$  și  $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AT}$ .

a) Arătați că vectorii  $\overrightarrow{MN}$  și  $\overrightarrow{NP}$  sunt coliniari.

b) Arătați că  $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{TN}$ .

(\*\*\*)

**Subiectul 4.** Fie  $ABC$  un triunghi dreptunghic în  $A$  și  $M$  un punct mobil pe cercul său circumscris.

a) Arătați că punctul  $P$  definit de relația  $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$  se mișcă pe un cerc.

b) Considerăm numerele  $x, y \in \mathbb{R}$ . Arătați că punctul  $Q$  definit de relația  $\overrightarrow{MQ} + (x+y) \cdot \overrightarrow{MA} = x \cdot \overrightarrow{MB} + y \cdot \overrightarrow{MC}$  se mișcă pe un cerc.

*Gazeta Matematică Nr.10/2023*

**Notă:**

*Toate subiectele sunt obligatorii.*

*Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.*

*Timp de lucru: 3 ore*